

DUYARLIK ÖLÇÜTLERİ

Bir nirengi ağının istenilen duyarlık isteklerine cevap verip vermediği duyarlık ölçütleri ile denetlenir. Duyarlık ölçütleri ağın kalitesinin göstergesidir. Nirengi ağının duyarlığına ilişkin bilgilerin tümü koordinat bilinmeyenlerinin varyans-kovaryans matrisinde bulunmaktadır. Ağın noktalarının koordinatlarının bulunması gereken sınırları gösteren duyarlık ölçütleri varyans-kovaryans matrisinin tümünden veya bir kısmından hesaplanır.

Bir ağın tasarımı aşamasında istenilen duyarlığa ilişkin kuramsal varyans-kovaryans matrisi belirlenebilir. Ölçülerin stokastik özelliklerinin toplandığı kuramsal varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \delta_{12} \sigma_1 \sigma_2 & \dots & \delta_{1n} \sigma_1 \sigma_n \\ \delta_{21} \sigma_2 \sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \delta_{2n} \sigma_2 \sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} \sigma_n \sigma_1 & \delta_{n2} \sigma_n \sigma_2 & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$\sigma_i^2 \rightarrow l_i$ ölçüsünün kuramsal varyansı

$\delta_{ij} \rightarrow l_i$ ve l_j ölçüleri arasındaki kuramsal korelasyon katsayısı

$\sigma_{ij} \rightarrow l_i$ ve l_j ölçülerinin kuramsal kovaryans

olarak alınmıştır. Kuramsal varyans-kovaryans matrisi ile kuramsal ters ağırlık matrisi arasında

$$\Sigma_{LL} = \sigma_0^2 Q_{LL}$$

eşitliği yazılabilir.

Ağın geometrik yapısı ve ölçülerin tahmin edilen kuramsal varyansları yardımıyla oluşturulan kuramsal varyans-kovaryans matrisi ile dengeleme hesabı sonucunda elde edilen

birim ölçünün ortalama hatası ile hesaplanan deneysel varyans-kovaryans matrisi karşılaştırılarak ağın istenilen duyarlığa ulaşp ulaşılmadığı denetlenebilir.

Bilinmeyenlerin varyans-kovaryans matrisi K_{xx} 'in elemanlarından nokta hatası, hata elipsi, bağıl hata elipsi gibi duyarlık ölçütleri hesaplanabilir. Bir ağın duyarlığında nokta duyarlığının homojenliği yani her yerde aynı duyarlığa sahip olmak çok önemlidir. Bu durum ise ancak varyans-kovaryans matrisinin λ_{\max} ve λ_{\min} özdeğerleri arasındaki farkın küçülmesiyle artar.

Ağda noktalar için tek tek lokal duyarlık ölçütlerinden ve ağın tümü için geçerli duyarlık ölçütlerinden bahsedilir.

Lokal Duyarlık Ölçütleri

❖ Koordinat Bilinmeyenlerinin Ortalama Hatası

Nirengi ağı noktaları için koordinat bilinmeyenlerinin ters ağırlık matrisi 2x2 boyutlu alt matrislere ayrılabilir.

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} q_{x_1x_1} & q_{x_1y_1} & q_{x_1x_2} & q_{x_1y_2} & \cdots & q_{x_1x_p} & q_{x_1y_p} \\ q_{y_1x_1} & q_{y_1y_1} & q_{y_1x_2} & q_{y_1y_2} & \cdots & q_{y_1x_p} & q_{y_1y_p} \\ q_{x_2x_1} & q_{x_2y_1} & q_{x_2x_2} & q_{x_2y_2} & \cdots & q_{x_2x_p} & q_{x_2y_p} \\ q_{y_2x_1} & q_{y_2x_2} & q_{y_2x_2} & q_{y_2y_2} & \cdots & q_{y_2x_p} & q_{y_2y_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{x_px_1} & q_{x_py_1} & q_{x_px_2} & q_{x_py_2} & \cdots & q_{x_px_p} & q_{x_py_p} \\ q_{y_px_1} & q_{y_px_2} & q_{y_py_2} & q_{y_py_2} & \cdots & q_{y_px_p} & q_{y_py_p} \end{bmatrix}$$

a- Bu durumda eğer kuramsal varyans σ_0^2 önceden tahmin ediliyorsa X_i koordinatının kuramsal ortalama hatası

$$\sigma_{x_i} = \sigma_0 \sqrt{q_{x_i x_i}}$$

eşitliğiyle hesaplanır.

Dengeleme hesabı sonunda hesaplanan dengeli değer \bar{X} ve deneysel varyans S_0^2 , umut değer μ ve kuramsal varyans σ_0^2 parametrelerinin istatistik tahminler sonucu elde edilen değerleridir.

Bu şekilde yapılan istatistiksel bir tahminde istenilen α yanılma olasılığı için $S=1-\alpha$ ile istatistiksel güven ve güven aralığı belirlenir. Bu işlemde normal dağılım geçerlidir. Böylece güven aralığının alt ve üst sınır değerleri,

$$P(a_i < X_i < b_i) = 1 - \alpha = S$$

$$a_i = X_i - \sigma_{xi} Z_{(1-\alpha/2)}$$

$$b_i = X_i + \sigma_{xi} Z_{(1-\alpha/2)}$$

eşitlikleri ile bulunabilir.

b-Eğer dengeleme hesabı sonucunda m_0^2 biliniyorsa yine Q_{xx} ters ağırlık matrisi yardımıyla X_i koordinatlarının deneysel ortalama hataları

$$m_{X_i} = m_0 \sqrt{q_{X_i X_i}}$$

eşitliğiyle bulunur. Deneysel değerler t-dağılımındadırlar ve güven aralığı alt ve üst sınır değerleri için

$$P(a_i < X_i < b_i) = 1 - \alpha = S$$

$$a_i = X_i - m_{xi} t_{f,(1-\alpha/2)}$$

$$b_i = X_i + m_{xi} t_{f,(1-\alpha/2)}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerde f serbestlik derecesini (fazla ölçü sayısını) göstermektedir.

Koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları ağırlık noktalarının tümü için hesaplanabilecek bir duyarlık ölçütüdür.

❖ Nokta Konum Hatası

Herhangi bir P_i noktası için ters ağırlık matrisi

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} q_{X_i X_i} & q_{X_i Y_i} \\ q_{Y_i X_i} & q_{Y_i Y_i} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa Helmert tarafından konum hatası olarak bu noktanın varyans-kovaryans matrisi K_{ii} 'nin izi tanımlanmıştır.

$$m_{P_i} = \sqrt{\text{iz}(K_{ii})} = m_0 \sqrt{\text{iz}(Q_{ii})} = m_0 \sqrt{q_{X_i X_i} + q_{Y_i Y_i}}$$

$$m_{P_i} = \sqrt{m_{X_i}^2 + m_{Y_i}^2}$$

$$m_{P_i} = m_0 \sqrt{\lambda_A + \lambda_B}$$

Konum hatası, Werkmeister tarafından K_{ii} 'nin determinantı olarak tanımlanmıştır.

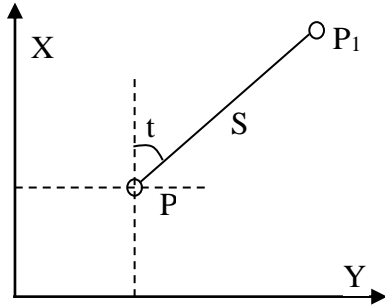
$$m_{P_i}^2 = \det(K_{ii}) = K_{X_i X_i} K_{Y_i Y_i} - K_{X_i Y_i} K_{Y_i X_i}$$

$$m_{P_i}^2 = m_0^4 q_{X_i X_i} q_{Y_i Y_i} - m_0^4 q_{X_i Y_i} q_{Y_i X_i}$$

$$m_{P_i}^2 = m_0^4 \lambda_A \lambda_B$$

$$m_{P_i} = m_0^2 \sqrt{\lambda_A \lambda_B}$$

❖ Hata elipsi



İki Nokta Arasındaki Semt ve Uzunluk

Koordinatları (X, Y) sabit olan P noktası ile koordinatları $(X_1 + m_X, Y_1 + m_Y)$ olan P_1 noktaları arasındaki uzunluk

$$S^2 = (X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2$$

eşitliğiyle hesaplanır. Bu eşitliğe hata yayılma kuralı uygulanırsa

$$2Sd_s = 2(X_1 - X)d_x + 2(Y_1 - Y)d_y$$

$$d_s = \frac{(X_1 - X)}{S} d_x + \frac{(Y_1 - Y)}{S} d_y$$

$$\frac{X_1 - X}{S} = \cos t, \quad \frac{Y_1 - Y}{S} = \sin t \text{ yazılırsa;}$$

$d_s = \cos(t)d_x + \sin(t)d_y$ elde edilir hata yayılma kuralından;

$$m_s^2 = \cos^2 t m_x^2 + \sin^2 t m_y^2 \text{ yada}$$

$$m_s^2 = \left(\frac{X_1 - X}{S}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{Y_1 - Y}{S}\right)^2 m_y^2$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe hata elipsinin topuk noktası eğrisi denklemi denir.

(27) eşitliğinin karesi alınır ve hata elemanları cinsinden yazılırsa

$$d_s = \cos t \, d_x + \sin t \, d_y$$

$$m_s^2 = \cos^2 t \, m_x^2 + 2 \cos t \sin t \, m_{xy} + \sin^2 t \, m_y^2$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikteki ifadelerin yerine ağırlığın tanımından

$$m_x^2 = m_0^2 q_{xx}, \quad m_y^2 = m_0^2 q_{yy}, \quad m_{xy} = m_0^2 q_{xy}$$

yazılırsa eşitlik

$$m_s^2 = m_0^2 (\cos^2 t \, q_{xx} + 2 \cos t \sin t \, q_{xy} + \sin^2 t \, q_{yy})$$

olarak elde edilir. Bu ifadede

$$\bar{X} = m_s \cos t, \quad \bar{Y} = m_s \sin t$$

kısaltmaları yapılırsa

$$m_s^2 = m_0^2 \left(\frac{\bar{X}^2}{m_s^2} q_{xx} + 2 \frac{\bar{X} \bar{Y}}{m_s^2} q_{xy} + \frac{\bar{Y}^2}{m_s^2} q_{yy} \right)$$

$$m_s^2 = \frac{m_0^2}{m_s^2} (\bar{X}^2 q_{xx} + 2 \bar{X} \bar{Y} q_{xy} + \bar{Y}^2 q_{yy})$$

$$\frac{m_s^4}{m_0^2} = (\bar{X}^2 q_{xx} + 2 \bar{X} \bar{Y} q_{xy} + \bar{Y}^2 q_{yy})$$

eşitliği elde edilir. Herhangi bir doğrultudaki uzunluğun ortalama hatası için $q_{x'x'} = \max$ ve $q_{x'y'} = 0$ olacak şekilde θ açısı kadar döndürülürse,

$$\bar{X} = X' \cos \theta - Y' \sin \theta, \quad \bar{Y} = Y' \cos \theta + X' \sin \theta \quad \text{için}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2q_{XY}}{q_{XX} - q_{YY}}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadede θ için

$$q_{X'X'} = \max, \quad m_{X'} = m_0 \sqrt{q_{X'X'}} = A_H$$

ve $(\theta+100)$ için

$$q_{Y'Y'} = \min, \quad m_{Y'} = m_0 \sqrt{q_{Y'Y'}} = B_H$$

eşitlikleri bulunur. Herhangi bir Φ doğrultusundaki uzunluk ortalama hatası için ;

$$m_s^2 = A_H^2 \cos^2(\Phi - \theta) + B_H^2 \sin^2(\Phi - \theta)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik X' doğrultusundaki büyük yarı eksen A_H ve Y' doğrultusunda küçük yarı eksen B_H olan Helmert ortalama hata elipsine ilişkin topuk noktası eğrisinin denklemdir. Buna ilişkin hata elipsi denklemi

$$\frac{X'^2}{A_H^2} + \frac{Y'^2}{B_H^2} = 1$$

şeklinde elde edilir. (33) eşitliği bu durumda

$$m_s^4 = \left(\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 \right)^2 = \left(X'^2 + Y'^2 \right)^2 = A_H^2 X'^2 + B_H^2 Y'^2$$

şekline gelir Bu eşitlikten

$$\Phi = 0^\circ \quad \text{için } m_X^2 = A_H^2 \cos^2 \theta + B_H^2 \sin^2 \theta$$

$$\Phi = 100^g \text{ için } m_Y^2 = A_H^2 \sin^2 \theta + B_H^2 \cos^2 \theta$$

$$m_X^2 + m_Y^2 = m_P^2 = A_H^2 + B_H^2$$

eşitlikleri yazılabilir.

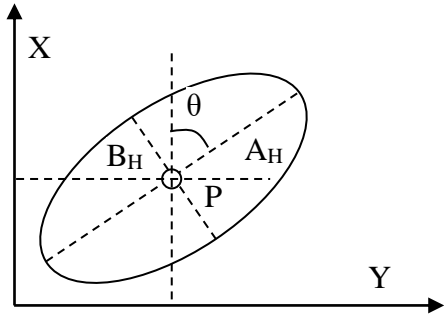
Hata elipsi elemanları için

$$A_H = \sqrt{\frac{1}{2}(q_{XX} + q_{YY} + W)}$$

$$B_H = \sqrt{\frac{1}{2}(q_{XX} + q_{YY} - W)}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{XY}}{q_{XX} - q_{YY}}$$

$$W^2 = (q_{XX} - q_{YY})^2 + 4q_{XY}^2 \quad \text{eşitlikleri yazılır.}$$



Şekil 2. Hata Elipsinin Elemanları

❖ Kuramsal Güven Elipsi

Bir P_i noktasının \bar{X} ile gösterilen gerçek koordinatlarının gerçek düzeltmeleri

$\mathcal{E} = \bar{X} - X_i$ ile, bu düzeltmelerin ters ağırlık matrisi ise

$$Q_{\mathcal{E}} = Q_{ii}$$

eşitliği ile verilir. Gerçek düzeltmelerden yararlanarak kuramsal varyans

$$S_0^2 = \frac{\mathcal{E}^T Q_{ii} \mathcal{E}}{2}$$

eşitliğiyle bulunur. Kuramsal ve deneysel varyansın karşılaştırılması Chi-kare dağılımına uyar ve aralarındaki ilişki

$$X^2_f = f \frac{S_0^2}{\sigma_0^2} \leq X^2_{f,1-\alpha}$$

$$(\bar{X} - X)^T Q_{ii}^{-1} (\bar{X} - X) \leq \sigma_0^2 X^2_{2,1-\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizliğin olasılık bağıntısı istatistik güvene eşittir.

$$P\left\{(\bar{X} - X)^T Q_{ii}^{-1} (\bar{X} - X) \leq \sigma_0^2 X^2_{2,1-\alpha}\right\} = 1 - \alpha$$

Bu eşitsizliğin sınırladığı alana kuramsal güven elipsi adı verilir ve elemanları

$$A_K = \sigma_0 \sqrt{\lambda_A X^2_{2,1-\alpha}}$$

$$B_K = \sigma_0 \sqrt{\lambda_B X^2_{2,1-\alpha}}$$

$$\theta_K = \theta_H = \arctan \frac{S_{AY}}{S_{AX}}$$

eşitlikleriyle hesaplanır.

❖ Güven Elipsi

Dengeleme hesabı sonucunda elde edilen düzeltmelerden hesaplanan birim ölçünün ortalama hatası ile koordinat bilinmeyenlerinin gerçek düzeltmelerinden hesaplanan kuramsal varyans aynı σ_0^2 değerinin deneysel değerleri olduğundan bunların oranları F-dağılımına uyar. Bu oran

$$\frac{s_0^2}{m_0^2} = \frac{(\bar{X} - X)^T Q_{ii}^{-1} (\bar{X} - X)}{2m_0^2} = F_{2,f} \leq F_{2,f,1-\alpha}$$

eşitsizlikleri ile yazılabilir. Bu eşitsizliğin olasılık bağıntısı istatistik güvene eşittir.

$$P\left\{(\bar{X} - X)^T Q_{ii}^{-1} (\bar{X} - X) \leq 2m_0^2 F_{2,f,1-\alpha}\right\} = 1 - \alpha$$

Bu eşitsizliğin sınırladığı alanın çevresi güven elipsi diye adlandırılan elipstir ve bu elipsin yarı eksenleri

$$\begin{aligned} A_G &= m_0 \sqrt{2\lambda_A F_{2,f,1-\alpha}} \\ B_G &= m_0 \sqrt{2\lambda_B F_{2,f,1-\alpha}} \\ \theta_G &= \theta_H = \arctan\left(\frac{s_{AY}}{s_{AX}}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile bulunur.

❖ Bağlı (Relatif) Hata Elipsleri

P_i ve P_k gibi iki noktanın koordinat farkları vektörü ve ağırlık matrisi

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} X_k - X_i \\ Y_k - Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ X_k \\ Y_i \\ Y_k \end{bmatrix}$$

$$Q_{dd} = \begin{bmatrix} q_{dxdx} & q_{dxdy} \\ q_{dydx} & q_{dydy} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilsin. Helmert'in hata elipsi tanımına benzer şekilde bağlı hata elipsinin elemanları

$$A_{BH} = m_0 \sqrt{\frac{1}{2} (q_{dxdx} + q_{dydy} + W_B)}$$

$$B_{BH} = m_0 \sqrt{\frac{1}{2} (q_{dxdx} + q_{dydy} - W_B)}$$

$$\theta_{BH} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{dxdy}}{q_{dxdx} - q_{dydy}}$$

$$W_B^2 = (q_{dxdx} - q_{dydy})^2 + 4q_{dxdy}^2$$

eşitlikleri ile hesaplanır.

❖ Bağlı Güven Elipsi

Koordinat farkları vektörünün gerçek değerleri $\bar{\underline{d}}$ ile gösterilerek gerçek düzeltmeler $\mathcal{E}_d = \bar{\underline{d}} - \underline{d}$ eşitliğinden hesaplanan değerlerle bulunan S_0^2 deneysel varyansı ve dengeleme hesabı sonucunda hesaplanan birim ölçünün ortalama hatası aynı σ_0^2 kuramsal varyansının deneysel değerleridir ve aralarında kurulan olasılık bağıntısı istatistik güvene eşittir.

$$P\left\{\left(\bar{\underline{d}} - \underline{d}\right)^T Q_{dd}^{-1} \left(\bar{\underline{d}} - \underline{d}\right)\right\} = 2m_0^2 F_{2,f,1-\alpha} = 1 - \alpha$$

Bu eşitlikten bağlı güven elipsinin yarı eksenleri

$$\begin{aligned} A_{BG} &= m_0 \sqrt{2\lambda_A F_{2,f,1-\alpha}} \\ B_{BG} &= m_0 \sqrt{2\lambda_B F_{2,f,1-\alpha}} \\ \theta_{BG} &= \theta_{BH} = \arctan\left(\frac{S_{Ady}}{S_{Adx}}\right) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2q_{dxdy}}{q_{dxdx} - q_{dydy}} \end{aligned}$$

Buraya kadar bahsedilen hata ve güven elipsleri karşılaştırılırsa şöyle bir sonuç ortaya çıkar. Kuramsal güven elipsi ve hata elipsinin yarı eksenleri arasında

$$\frac{A_K}{A_H} = \sqrt{X_{2,1-\alpha}^2}$$

eşitliği, güven elipsi ile hata elipsinin yarı eksenleri arasında

$$\frac{A_G}{A_H} = \sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte $S=0.95$ ve $f=\infty$ alınırsa

$$A_G = 2.45A_H$$

elde edilir. Çeşitli serbestlik dereceleri için bu değer hesaplanırsa bir noktanın geometrik yeri olarak düşünülen hata elipsi içine düşme olasılığı yaklaşık %38 alınabileceği görünür. Buna karşın noktaların güven elipsi içine düşme olasılığı istatistik güven S serbest olarak seçilebilmektedir.